

# CZTERY OBlicZA GEOMETRII: OD POSTULATÓW EUKLIDESA DO HIPOTEZY KOSMICZNEGO CENZORA

Maciej Dunajski

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics  
University of Cambridge

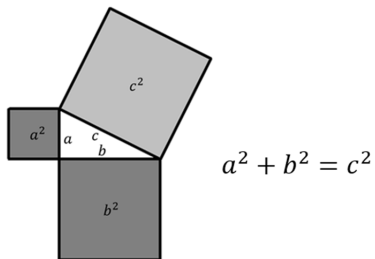




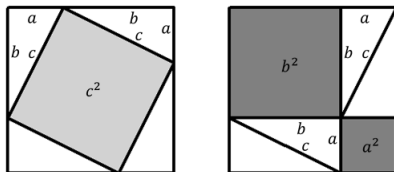
Piramida Cheopsa (2600BC).

- Geometria użytkowa: Stwierdzenia geometryczne ustalane empirycznie.
- Pojęcia abstrakcyjne nie różnią się od rzeczywistych obiektów:  
Odcinek = kawałek sznurka, lub prosta ścieżka  
Objętość = ile ziarna zmieści się w pojemniku.

# TWIERDZENIE PITAGORASA



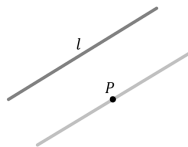
- Rygorystyczny dowód bez matematycznych symboli.





Postulaty Euklidesa z Alexandrii (4. wiek p.n.e.)

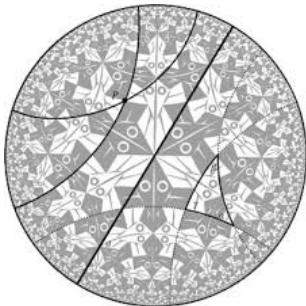
- 1 Dokładnie jeden odcinek łączy dwa dowolne punkty.
- 2 Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie.
- 3 Okrąg jest zadany przez jego promień i środek.
- 4 Wszystkie kąty proste są równe.
- 5 (Postulat równoległy) Przez dowolny punkt  $P$  nienależący do prostej  $l$ , przechodzi dokładnie jedna prosta zawierająca  $P$ , i nie przecinająca  $l$ .



# DWIE NIE IDENTYCZNE PROSTE PRZECINAJĄ SIĘ W CO NAJWYŻEJ JEDNYM PUNKCIE

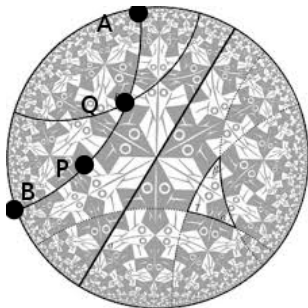
- Załóżmy, że tak nie jest (dowód 'nie wprost'. *Jedną z najlepszych matematycznych broni, doskonalszą niż gambit w szachach - szachista ryzykuje pionka czy figurę, zaś matematyk ryzykuje całą grę.* G. H. Hardy.)
- ... więc dwie proste przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ .
- Wtedy istnieją przynajmniej dwie proste przechodzące przez  $P$  and  $Q$ .
- Co zaprzecza pierwszemu postulatowi Euklidesa.

- Czy postulat równoległy ('przez dowolny punkt  $P$  nienależący do prostej  $l$ , przechodzi dokładnie jedna prosta zawierająca  $P$ , i nie przecinająca  $l$ ') jest niezależny od pierwszych czterech aksjomatów?
- Dysk Poincaré  $\mathbb{D}$  = region wewnątrz okręgu o promieniu 1.
- Linie hiperboliczne



# GEOMETRIA HIPERBOLICZNA

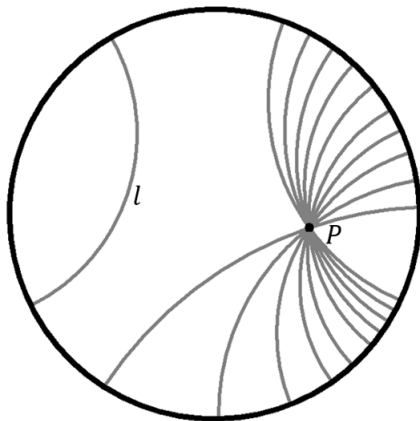
- Czy postulat równoległy ('przez dowolny punkt  $P$  nienależący do prostej  $l$ , przechodzi dokładnie jedna prosta zawierająca  $P$ , i nie przecinająca  $l$ ') jest niezależny od pierwszych czterech aksjomatów?
- Dysk Poincaré  $\mathbb{D}$  = region wewnątrz okręgu o promieniu 1.
- Linie hiperboliczne



- Dystans hyperboliczny

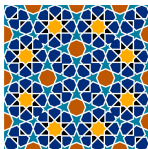
$$d(P, Q) = \ln \left( \frac{|AP||BQ|}{|AQ||BP|} \right).$$

# GEOMETRIA NIE-EUKLIDESOWA: POSTULAT RÓWNOLEGLY NIE JEST SPEŁNIONY

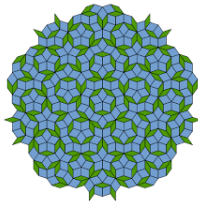




- Mozaika Marokańska



- Parkietaż Penrose'a: kafelki i strzałki

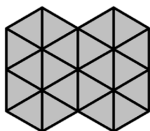


- Parkietaż regularny: plaster miodu

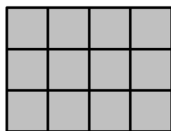


# PARKIETAŻE EUKLIDESOWE I HIPERBOLICZNE

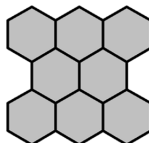
- Regularne parkietaże płaszczyzny



*Triangles*

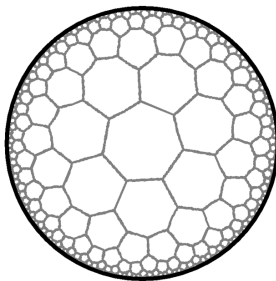


*Squares*

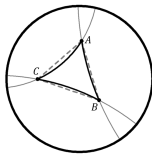


*Hexagons*

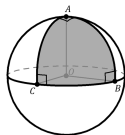
- Parkietaż hiperboliczny regularnymi siedmiokątami



- Trójkąt hiperboliczny:  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .



- Trójkąt sferyczny:  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .



- Krzywizna powierzchni



$$K = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\text{Area}(\Delta(ABC))}.$$

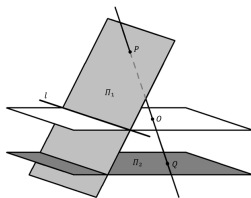


Duccio di Buoninsegna (circa 1310) *Pojmanie Jezusa*



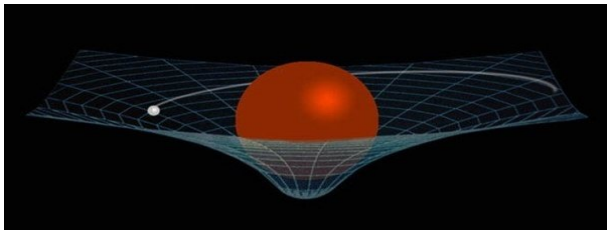
Canaletto (circa 1730) *Dziedziniec Pałacu Dożów*

# HORYZONT=PROSTA W NIESKOŃCZONOŚCI

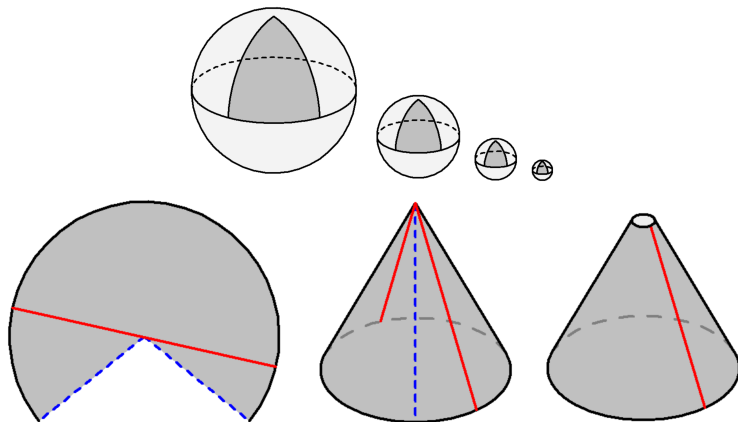


- 1 Rzut płaszczyzny  $\Pi_1$  na płaszczyznę  $\Pi_2$  z punktu  $O$ .
- 2 Punkt  $P$  w  $\Pi_1$  rzutowany na przecięcie prostej  $OP$  z  $\Pi_2$ .
- 3 Płaszczyzna rzutowa = płaszczyzna Euklidesowa + prosta.
- 4 Twierdzenie Pitagorasa: fałszywe (brak pojęcia pola powierzchni).  
Brak pojęć równoległości, i odległości, ...

- Dwu-wymiarowa płaszczyzna, trój-wymiarowa przestrzeń , cztero-wymiarowa **czaso-przestrzeń** (przestrzeń=3+czas=1)
- Grawitacja jest efektem krzywizny



- Ogólna Teoria Względności Einsteina: **Masa=Krzywizna**.
- Obszary nieskończonej krzywizny: Wielki Wybuch, osobliwość czarnej dziury.
- Prawa natury (jakie znamy) się załamują.



- Twierdzenie (**Roger Penrose, 1965**): Pod warunkiem trzech 'rozsądnych' założeń czasoprzestrzeń musi zawierać osobliwość.
  - 1 Powrót do przyszłości to fikcja.
  - 2 Grawitacja jest siłą przyciągającą.
  - 3 Istnieje powierzchnia złapana.





- 1 Geometria Euklidesowa
- 2 Geometria Hiperboliczna
- 3 Geometria Rzutowa
- 4 Geometria Wszechświata

Copyrighted Material

Maciej Dunajski

# GEOMETRY

A Very Short Introduction

OXFORD

Copyrighted Material

- 1 Geometria Euklidesowa
- 2 Geometria Hiperboliczna
- 3 Geometria Rzutowa
- 4 Geometria Wszechświata

Dziękuję!